Title	準安定状態近傍のゆらぎと緩和(非線形緩和過程の統計物理,研究会報告)
Author(s)	笹川, 文義
Citation	物性研究 (1982), 39(3): C7-C9
Issue Date	1982-12-20
URL	http://hdl.handle.net/2433/90810
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

したアトラクタが現われ，Ωと固有周波数Ω_0の比が有理比の場合は周期解，無理比の場合は２重周期解となり，普通のパラメトリック励振系の特徴が現われるだけである。

これに対しCが大きくなると Chaotic な様相が現われる。図２は，$A=0.3$，$B=3.0$の limit cycle で $\Omega=\Omega_0(=0.561)$とした場合で，上から順に$C=0.9$，0.5，0.1 である。明らかに$C=0.1$と0.5，0.9は様相が異なると言えよう。

Chaos である可能性は，さらに詳しい解析を行ってみないと，なんとも言えないが，この系の特徴として，周辺部の(1，0)，(0，1)に不安定点をもっており，Cが大きくなると軌道は元のアトラクタからかなり押し出されてこの２つの不安定点を時々訪れるようになる，ということが重要なカギになっているように思われる。

準安定状態近傍のゆらぎと緩和

東大・理　笹　川　文　義

今日においても，準安定状態の問題は十分に理解されているとはいえない。具体的には，核形成の問題，光学的双安定性などが上げられる。これらの問題では，準安定状態にあった系がトンネル効果によって時間的にどのように緩和して行くかが興味の中心となる。そこで次の様なモデルを考えるのがトンネル効果の問題を考察するのに役立つと思われる。系の巨視的変数$x(t)$が次のランジュバン方程式に従うとする。

$$\frac{d}{dt}x(t)=\gamma x(t)-g x^3(t)+\eta(t) \tag{1}$$

ここで$\eta(t)$は$<\eta(t)\eta(t')>=2\varepsilon\delta(t-t')$なるガウシャンホワイトノイズである。$x=\pm\sqrt{\gamma/g}$（$\gamma$，$g$は共に正数）は(1)の決定論的な安定点である。初期値$x(0)$が安定点近傍にあるとき，確率変数$x(t)$の分布関数$P(x,t)$の時間的発展をゆらぎの強さεが充分小さいとして漸近的に評価したい。一つの方法として，鈴木の非線形スケール変換[1)]とΩ展開[2)]を組み合わせる方法を提唱した。[3)] ランジュバン方程式(1)の決定論的部分が非線形性の凡てであるからこれを形式的に消去した後に，近似を施した方が有効に系の非線形性を取り入れることができる。確率変数$x(t)$から$\xi(t)$への非線形スケール変換Sを次の様に定義する。

$$x(t)=S(\xi(t),t) \tag{2}$$

$$S(\xi,t)=\xi e^{\gamma t}\left[1+\xi^2\frac{g}{\gamma}(e^{2\gamma t}-1)\right]^{-\frac{1}{2}} \tag{3}$$

確率変数 $\xi(t)$は明らかに次の確率微分方程式に従う。

$$\frac{d}{dt}\xi(t) = [S'(\xi(t), t)]^{-1}\eta(t) \tag{4}$$

ここで $S'(\xi, t) = \frac{\partial}{\partial \xi}S(\xi, t)$ である。上式(4)を $\sqrt{\varepsilon}$ を微小パラメーターとして，$\eta(t)$が$\sqrt{\varepsilon}$のオーダーであることに注意して摂動展開によって解く。つまり，

$$\xi(t) = \xi_0(t) + \sqrt{\varepsilon}\,\xi_1(t) + \cdots \tag{5}$$

として逐次 ξ_0，ξ_1 を決定する。ここでは $\sqrt{\varepsilon}$ について一次まで取ることにする。当然摂動展開が有効であるためには $\varepsilon\tilde{\sigma}(t) \equiv <(\xi(t) - <\xi(t)>)^2> \ll 1$ が必要である。一つ注意しなければいけないのは，非線形変換 $\xi(t) = S^{-1}(x(t), t)$ が $|x(t)| \leqq (\frac{\gamma}{g})^{1/2}(1 - e^{-2\gamma t})^{-1/2}$ を満たすサンプルパスしか拾っていないことである。これは $\varepsilon \to 0$ の極限では良い近似となっている。こうして求められた漸近的に正しい分布関数は

$$P(x, t) = (2\pi\varepsilon\tilde{\sigma}(t))^{-\frac{1}{2}}\left[1 - \frac{g}{\gamma}x^2(1 - e^{-2\gamma t})\right]^{-\frac{3}{2}}\exp\{$$

$$-(2\varepsilon\tilde{\sigma}(t))^{-1}\{xe^{-\gamma t}\left[1 - \frac{g}{\gamma}x^2(1 - \frac{g}{\gamma}x^2(1 - e^{-2\gamma t})\right]^{-\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{\gamma}{g}}\}^2\} \tag{6}$$

となる。ここで $x(0) = -\sqrt{\gamma/g}$ とし，$\tilde{\sigma}(t) = \tilde{\sigma}(0) + \frac{1}{2\gamma}(e^{4\gamma t} - 1)$ である。(6)式から容易に，安定点（この場合は $x = \sqrt{\gamma/g}$）近傍に分布関数のピークが初めて出現する時刻 “emergence time of stable peak” t_s が求められる。それは

$$t_s = (\frac{1}{6\gamma})\log(\frac{2\gamma^2}{3g^2}) \quad (\varepsilon \to 0) \tag{7}$$

で与えられる。この時刻で $\varepsilon\tilde{\sigma}(t_s) = O(\varepsilon^{1/3})$ となり，ξ 変数に対する摂動展開が妥当であることがわかる。この方法を一般的なランジュバン方程式やマスター方程式に拡張するのは容易である。注意すべきことは emergence time of stable peak t_s は Kramers time[4] とは別の time scale であることである。Kramers time な分布関数が充分に発達したダブルピークを持つにいたる time scale であり，式(7)の t_s は安定点近傍に初めて分布関数のピークが出現する時刻なのである。さらにもう一つの time scale が存在する。それは，系が準安定状態からわずかに離れた所から出発したとすると，準安定状態へ向かって緩和する際の time scale $\frac{1}{\gamma}$ である。この time scale を local relaxation time と呼ぶことにする。

このような考察から我々は系が準安定状態近傍から緩和する際には三つの time scale, local relaxation time, emergence time of stable peak, Kramers time, が存在することを知ることができる。

References

1) M. Suzuki, Adv. Chem. Phys. **46** (1981) 195.

2) van Kampen, Can. J. Phys. **39** (1961) 551.
R. Kubo, K. Matsuo and K. Kitahara, J. Stat. Phys. **9** (1973) 51.

3) F. Sasagawa, in preparation.

4) H. A. Kramers, Physica **7** (1940) 284.

非平衡統計力学の最近の話題
－ＴＣ及ＴＣＬ方程式をめぐって－

お茶の水大・理　　柴　田　文　明

非平衡系のダイナミックスを問題とする場合，減衰理論という枠組は有用である。密度行列を追う方法と物理量それ自身の時間発展を問題とする二つの立場がある。前者は Kubo, Nakajima, Zwanzig という人達によって展開された方法論であり，後者は通常 Mori の方法と呼ばれる。ここでは前者の方法論の近年における進展に的をしぼって議論をしよう。

我々が相手とする物理系の中で実験観測にかかるものはごく少数の自由度であって，他の変数は間接的に関わるにすぎない。そこで注目する変数以外は消去してしまおう，ということになる。全系の密度行列 $\hat{W}(t)$ の中で我々の必要な部分を $\mathscr{P}\hat{W}(t)$ とすれば $\mathscr{P}\hat{W}(t)$ は次の方程式にしたがう：

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathscr{P}\hat{W}(t) = g\,\mathscr{P}\hat{L}_1(t)\mathscr{P}\hat{W}(t) + \int_{t_0}^{t} d\tau\, \Phi(t,\tau)\mathscr{P}\hat{W}(\tau) + \mathscr{I}(t) \tag{1}$$

この方程式はＴＣ（時間に関してたたみ込み）型の式と言う。g は摂動の強さをあらわすパラメーターである。最近分ったことは積分の核となっている関数 $\Phi(t,\tau)$ の一般形が単純な形をしているということである。$\mathscr{P}$ を特殊化するとこの一般形は “ partial cumulant ” というもので書き下せてしまう。

最近の大きな進展はＴＣＬ型（時間に関してたたみ込み無しの形，あるいは非定常型）の方程式の発見である。

この式は次のような形をしている：